TEMA 5: TRANSFORMADA DE LAPLACE

Transformada de Laplace: transformada bilateral de Laplace; región de convergencia; relación entre transformada de Fourier y transformada de Laplace; análisis de sistemas representados por ecuaciones diferenciales; transformada unilateral de Laplace y su aplicación al análisis de sistemas.

TRANSFORMADA DE LAPLACE

Transforma la variable real t en la variable compleja $s = \sigma + j\omega$

Punto de partida del análisis: las exponenciales complejas de la forma e^{st} son funciones propias de los sistemas LTI:

- Si la entrada es $x(t) = e^{st}$, entonces la salida será:

  $$y(t) = e^{st}H(s)$$

  - $H(s)$, valor propio asociado a la exponencial compleja e^{st}. Es la transformada de Laplace de la respuesta al impulso $h(t)$ y se conoce como función de transferencia o función del sistema LTI.

La transformada de Laplace de una señal arbitraria $x(t)$ se define como:

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$$

- Si restringimos la variable compleja s al eje imaginario, $s = j\omega$, la expresión de transformada de Laplace se corresponde con la de Fourier:

  $$X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$$

- Se puede interpretar la transformada de Laplace como la transformada de Fourier de la señal $x(t)$ multiplicada por la exponencial real $e^{-\sigma t}$ que será creciente o decreciente con el tiempo dependiendo del valor de σ:

  $$X(s) = X(\sigma + j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t)e^{-\sigma t})e^{-j\omega t}dt$$

  que puede verse como la transformada de Fourier de la señal $x(t)e^{-\sigma t}$:

  $$X(s) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

Región de convergencia de la transformada de Laplace

Se define la región de convergencia (RoC) de la transformada de Laplace como el conjunto de valores de s para los que la transformada $|X(s)| < \infty$. Esto es equivalente a decir que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|e^{-\sigma t}dt < \infty$$

Que un determinado valor de s pertenezca o no a la RoC depende únicamente de la parte real de s: $\sigma = Re\{s\}$

Propiedades de la región de convergencia

Propiedad 1: La RoC de $X(s)$ son bandas verticales paralelas al $eje - \omega$.

Propiedad 2: Si $X(s)$ es una función racional la RoC no contiene polos de la transformada de Laplace.

Propiedad 3: Si $x(t)$ es una señal de duración finita y absolutamente integrable, la RoC es todo el plano s.

Propiedad 4: Si $x(t)$ es una señal acotada por la izquierda (señal unilateral derecha), la RoC se extiende hacia la derecha.

Propiedad 5: Si $x(t)$ es una señal acotada por la derecha (señal unilateral izquierda), la RoC se extiende hacia la izquierda.

Propiedad 6: Si $x(t)$ es una señal no acotada en el tiempo (señal bilateral), la RoC es una banda paralela al $eje - \omega$.

Además:

Propiedad 7: si la transformada de Laplace de $x(t)$ es una función racional, entonces su RoC está limitada por polos o se extiende al infinito. Adicionalmente no hay polos de $X(s)$ en la RoC.

Propiedad 8: Si la transformada de Laplace de $x(t)$ es racional entonces si $x(t)$ está acotada por la izquierda la RoC es la región en el plano s a la derecha del polo más a la derecha. Si $x(t)$ está acotada por la derecha la RoC es la región en el plano s a la izquierda del polo más a la derecha.

Transformada inversa de Laplace

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}ds$$

La señal continua $x(t)$ puede representarse como una integral ponderada de exponenciales complejas. El contorno de integración es la línea en el plano-s correspondiente a todos los puntos s que satisfaga $Re\{s\} = \sigma$. Como siempre, esta línea es paralela al $eje - \omega$. La evaluación formal de esta integral se realiza mediante la integral de contorno en el plano complejo. Sin embargo, si la transformada es una función racional (cociente de polinomios), la transformada inversa de Laplace se puede determinar sin la evaluación directa de esta ecuación, utilizando el método de expansión en suma de fracciones parciales.

Propiedades de la transformada de Laplace

Las propiedades fundamentales de la representación de Laplace para las señales analizadas anteriormente están reflejadas en la tabla proporcionada en clase y que también tenéis en la página de la asignatura.

CARACTERIZACIÓN DE LOS SISTEMA LTI

Un sistema LTI queda completamente determinado mediante la transformada de Laplace, $H(s)$, de su respuesta al impulso, $h(t)$, y de la RoC de la transformada.

Algunas de las características de los sistemas LTI pueden estudiarse a partir de $H(s)$.

- Estabilidad: un sistema LTI es estable si y sólo si la RoC de la función de transferencia $H(s)$ incluye al $eje - j\omega$ o bien si la frontera de la RoC es el propio $eje - j\omega$ y éste no contiene polos de la transformada de Laplace.

- Causalidad:
  - En un sistema LTI causal, la respuesta al impulso, $h(t)$, es nula para tiempos negativos ($h(t) = 0,\ t < 0$). Al tratarse de una señal acotada por la izquierda, la RoC se extiende hacia la derecha, hacia $s \longrightarrow \infty$.
  - Si la función de transferencia es racional, cociente de polinomios en s, la RoC es el semiplano situado a la derecha del polo más a la derecha hacia $s \longrightarrow \infty$.
  - En un sistema LTI anticausal, la respuesta al impulso, $h(t)$, es nula para tiempos positivos ($h(t) = 0,\ t > 0$). Al tratarse de una señal acotada por la derecha, la RoC se extiende hacia la izquierda, hacia $s \longrightarrow -\infty$.
  - Si la función de transferencia es racional, cociente de polinomios en s, la RoC es el semiplano situado a la izquierda del polo más a la izquierda hacia $s \longrightarrow -\infty$.

Sistemas caracterizados por ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes

Un sistema caracterizado por ecuaciones diferenciales tiene la forma:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{K=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k}$$

Calculando la transformada de Laplace (propiedad de derivación) se obtiene la función de transferencia del sistema continuo:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^{M} b_k s^k X(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

Se ve que la función de transferencia de un sistema descrito mediante una ecuación diferencial es siempre racional:

- Ceros: $\sum_{k=0}^{M} b_k s^k = 0$
- Polos: $\sum_{k=0}^{N} a_k s^k = 0$

Esta caracterización no incluye una especificación de la RoC. Para que quede completamente especificada debe conocerse información adicional del sistema, por ejemplo, estabilidad o causalidad.

TRANSFORMADA UNILATERAL DE LAPLACE

- Interés:
  - Análisis de sistemas causales
  - Análisis de sistemas especificados por ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes y con condiciones iniciales distintas de cero (sistemas que inicialmente no están en reposo)
  - La transformada unilateral de Laplace de una señal arbitraria $x(t)$ se define como:

$$\mathcal{X}(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

$$x(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}_u} \mathcal{X}(s)$$

Propiedades de la transformada unilateral de Laplace

Tiene varias propiedades importantes, muchas de las cuales son las mismas que la de la transformada bilateral y varias difieren significativamente. En la tabla proporcionada se resumen estas propiedades en clase y que también tenéis en la página de la asignatura.

Solución de ecuaciones diferenciales usando la transformada unilateral de Laplace

El uso principal de la transformada unilateral de Laplace es la obtención de una solución para ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes y con condiciones iniciales diferentes de cero (ver ejemplo en el pdf del tema 5, página de la asignatura).